CHUYÊN ĐỀ 7: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Kiến thức cơ bản:

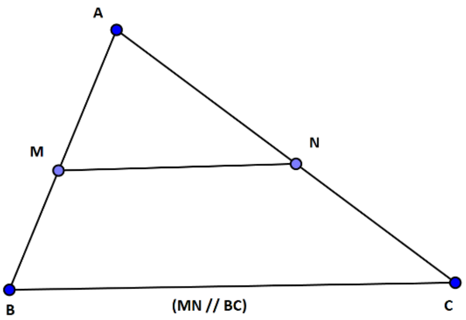
Phương pháp 1: Hai tam giác được gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ và các góc tương ứng tỉ lệ.

Xét ΔABC và ΔA'B'C', ta có:

Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ vµ $A = A'; B = B'; C = C'$ th× $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Phương pháp 2: Định lý Talet: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.Ta có:

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC'}; \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC};$



Phương pháp 3: Chứng minh các điều kiện cần và đủ để hai tam giác đồng dạng:

Hai tam giác có các cặp cạnh tương ứng tỷ lệ thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng tỷ lệ, hai góc xen giữa hai cặp cạnh ấy bằng nhau.

Phương pháp 4: Chứng minh trường hợp thứ nhất (cạnh-cạnh-cạnh): Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Phương pháp 5: Chứng minh trường hợp thứ 2 (cạnh-góc-cạnh): Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và 2 góc tạo bởi tạo các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam đó giác đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ A = A' \end{cases}$$

Phương pháp 6: Chứng minh trường hợp thứ 3 (góc-góc): Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases}$$

Phương pháp 7: Sử dụng chứng minh cho tam giác vuông

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia

thì hai tam giác đó đồng dạng.

- Nếu cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của

tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Phương pháp 8:

Chứng minh các tính chất của tỉ số đồng dạng để suy ra hai tam giác đồng dạng:

- Tỉ số hai đường phân giác, hai đường cao, hai đường trung tuyến, hai bán kính nội tiếp và ngoại tiếp, hai chu vi tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

- Tỉ số hai đường cao của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BH và B’H’ là hai đường cao.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$

thì $\frac{BH}{B'H'} = a$

- Tỉ số hai đường phân giác của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BD và B’D’ là hai đường phân giác lần lượt của B và B'.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BD}{B'H'} = a$

- Tỉ số hai đường trung tuyến của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BM và B’M’ là hai đường trung tuyến.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BM}{B'M'} = a$

- Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O’M’, O’N’, O’P’ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$

Nế'u a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: ΔABC∽ ΔA'B'C' và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O’M’, O’N’, O’P’ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C'

Nế'u a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và ΔA'B'C' thì

$$\frac{OM}{O'M'}=\frac{ON}{O'N'}=\frac{OP}{O'P'}=a.$$

- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Nếu ΔABC∽ ΔA'B'C' và là tỉ số đồng dạng của hai tam giác thì

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}=a^2.$$

2. Bài tập áp dụng:

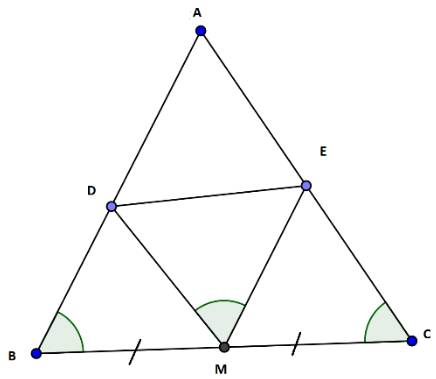
Bài tập 1: Cho ΔABC cân tại A; BC = 2a. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D và E trên AB; AC sao cho $DME=B$.

a) Chứng minh rằng: ΔBDM ∽ ΔCME

b) Chứng minh: ΔMDE ∽ ΔDBM

c) Chứng minh: BD.CE không đổi?

Chứng minh



a) Ta có: $DBM=ECM$ (1)

và $DBM=DCM$ (giả thiết)

Mà

$$DBM+BMD+MDB=180^0$$

$$DME+BMD+CME=180^0$$

Suy ra $MDB=CME$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: ΔBDM ∽ ΔCME (g - g).

b) Vì ΔBDM ∽ ΔCME nên

$\frac{BD}{CM}=\frac{DM}{ME}$ và BM = CM (giả thiết)

Suy ra $\frac{BD}{BM}=\frac{DM}{ME}$

Suy ra ΔMDE ∽ ΔDBM.

c) Vì ΔBDM ∽ ΔCME

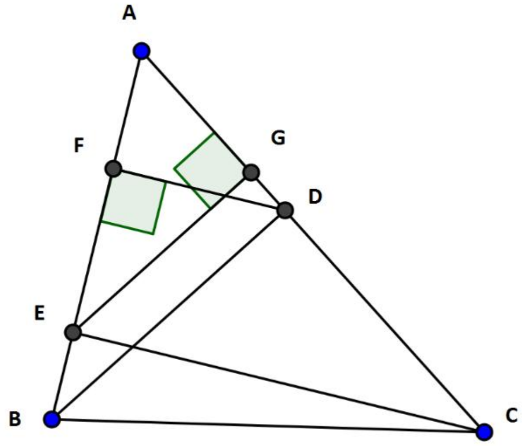
Suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE}$

Suy ra BD.CE = CM . BM

Mà CM = BM = $\frac{BC}{2} = a \Rightarrow BD.CE = \frac{a^2}{4}$ (không đổi)

Bài tập 2: Cho ΔABC, BD và CE là 2 đường cao của ΔABC. DF và EG là 2 đường cao của ΔADE.

Chứng minh rằng: ΔADE ∽ ΔABC đồng dạng.



Chứng minh

Xét ΔADB và ΔAEC, ta có:

A là góc chung.

$AEC = ADB = 90^0$

Suy ra ΔADB ∽ ΔAEC (g - g)

Suy ra: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Và $A = 90^0$

ΔADE ∽ ΔABC (g - c – g)

Bài tập 3: Lấy điểm M trên đường chéo AC của tứ giác ABCD có $B = 90^0$. Kẻ MN ⊥ BC (N ∈ BC) và MP ⊥ AD (P ∈ AD). Chứng minh: MN

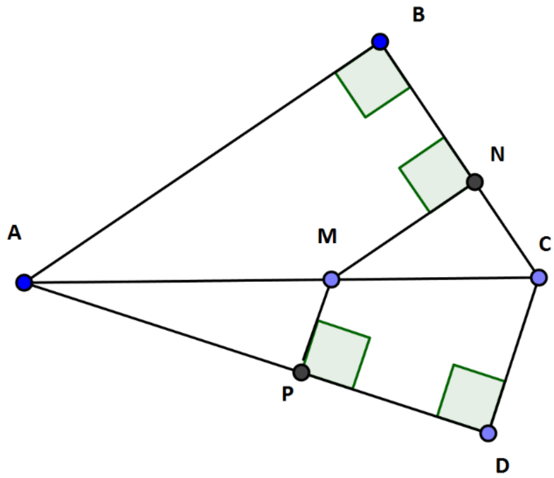
$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1.$$

Chứng minh

Vì AB ⊥ BC (giả thiết)

MN ⊥ BC (giả thiết)

Nên MN // AB



Suy ra ΔCNM ∽ ΔCBA suy $\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC}$ (1)

Ta có: MP // CD nên ΔAMP ∽ ΔACD

Suy ra $\frac{MP}{CD} = \frac{AM}{AC}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$\frac{MN}{AB}+\frac{MP}{CD}=\frac{MC+AM}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$$

Vậy $\frac{MN}{AB}+\frac{MP}{CD}=1.$

Bài tập 4: Cho đoạn thẳng AB. Gọi O là trung điểm của AB. Vẽ về 1 phía AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy C trên Ax, D trên By sao cho $COD = 90^0$.

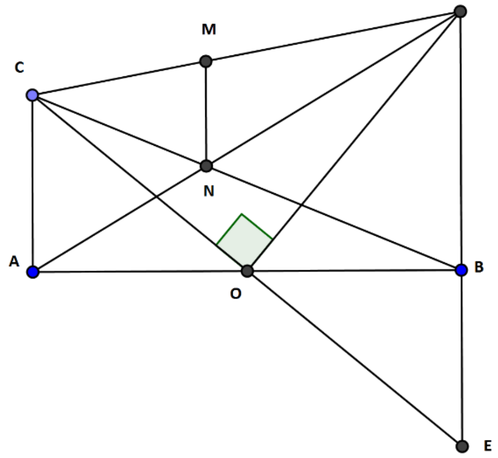
a) Chứng minh rằng: $\Delta ACO \backsim \Delta BDO$.

b) Chứng minh rằng: CD = AC + BD.

c) Kẻ OM $\perp$ CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng: MN // AC.

Chứng minh

a) Ta có:



$AOC = BOE$ (1)

$BOE + BOD = 90^0$

Suy ra $BOE = BDO$ (2)

Xét ΔACO và ΔBDO, có:

$OAC = DBO = 90^0$ (giả thiết)

$BOE = BDO = 90^0$ (theo (2))

Suy ra $\Delta ACO \backsim \Delta BDO$ (g - g)

b) Kẻ CO cắt DB tại E.

Ta có: $\Delta AOC = \Delta BOE$ (g - c - g)

Suy ra OC = OE.

Xét ΔCOD và ΔEOD, có:

OC = OE (chứng minh trên)

$COD = EOD = 90^0$

OD là cạnh chung.

Suy ra $\Delta COD = \Delta EOD$ (c - g - c).

Suy ra CD = ED (cạnh tương ứng).

Ta có: AC = BE suy ra AC + BD = BE + BD = ED (Vì CD = ED)

Vậy: AC + BD = CD.

c) Ta có: $\Delta ANC \backsim \Delta DNB$.

Suy ra $\frac{AN}{ND} = \frac{AC}{BD}$

$\frac{AN}{ND} = \frac{BE}{BD}$ (vì AC = BE)

Vì CD = ED nên ΔCDE cân tại D.

Suy ra OD là đường cao hạ từ đỉnh D.

Theo chứng minh ở câu b, ta có:

OB = OM (2 đường cao tương ứng)

CM = BE (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

MD = BD (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

$$\frac{AN}{ND} = \frac{BE}{BD} = \frac{CM}{MD} \Leftrightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$$

Theo định lý Talet, ta có: MN // AC.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình bình hành ABCD với đường chéo AC > BD. Gọi E và F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

a) Chứng minh rằng: $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$.

b) Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ một điểm E trên cạnh BC, ta kẻ Ex // AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: FE + EG = 2AM.

Bài tập 3: Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, BD và CE là 2 đường cao của ΔABC. DF và EG là 2 đường cao của ΔADE.

Chứng minh rằng:

a) $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

b) FG // BC.

Bài tập 5: Cho ΔABC (AB < AC). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) So sánh $BAH = CAH$

b) So sánh 2 đoạn thẳng BD và CE.

c) Chứng minh: $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Bài tập 6: Cho 4 điểm A, E, F, B theo thứ tự ấy trên 1 đường thẳng. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các hình vuông ABCD; FGHE.

a) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh: $\Delta OHE \backsim \Delta OBC$.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng CE và FD cùng đi qua O.

Bài tập 7: Cho ΔABC có các trung điểm của BC, CA, AB theo thứ tự là D, E, F. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho BM = MN = NC. Gọi P là giao điểm của AM và BE; Q là giao điểm của CF và AN. Chứng minh rằng:

a) F, P, D thẳng hàng và D, Q, E thẳng hàng.

b) $\Delta ABC \backsim \Delta DQP$.

Bài tập 8: Cho ΔABC; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, giao điểm 3 đường trung trực của Δ. Gọi E, D theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Chứng minh :

a) $\Delta OED \backsim \Delta HCB$

b) $\Delta GOD \backsim \Delta GBH$

c) Ba điểm O, G, H thẳng hàng và GH = 2OG.

Bài tập 9: Cho ΔABC, AD là phân giác A ; AB < AC. Trên tia đối của DA lấy điểm I sao cho $ACI = BDA$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ADB \backsim \Delta ACI$; $\Delta ADB \backsim \Delta CDI$

b) $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H.

Chứng minh rằng:

a) AE.AC = AF.AB

b) $\Delta AFE \backsim \Delta ACB$

c) $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$

d) $BF.BA + CE.CA = BC^2$